Proportionale Größen in Tabellen erfassen und graphisch darstellen. Dreisatz

Unterrichtsvorschläge

Musteraufgaben, Musterlösungen

Auch: Wiederholung für Erwachsene

Datei Nr. 10512

Stand: 17. Februar 2020

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

An Eltern und Lehrer

Die Behandlung des Dreisatzes führt jeder anders durch. Der moderne Einstieg beginnt oft mit der Besprechung der Proportionalität und hat dann den Dreisatz als Folgeanwendung. Wer dies so gelernt hat, der lese dieses Manuskript in dieser Reihenfolge:

Abschnitt 2: Proportionalität → Abschnitt 1: Sachzusammenhänge → Abschnitt 3: Dreisatz

Man kann natürlich auch nur die Aufgaben des Abschnitts 3 durcharbeiten und sich dabei die Lösung herauspicken, die etwa der Unterrichtsmethode entspricht.

Lehrern bietet sich bei diesem Thema eine schöne Möglichkeit, die Ursprungsgerade und den Steigungsbegriff behutsam einzuführen. Wenn dann anschließend die „Verschobene Proportionalität“ als Linearer Zusammenhang besprochen wird (siehe Datei 10512), dann hat man den Übergang zur Geradengleichung vollzogen. Das Thema lineare Gleichungen bzw. Terme sind dann auch schon in Reichweite. In 15512 befinden sich die **umgekehrte Proportionalität** und Beispiele zu **zusammengesetzten Zuordnungen**.

<u>Hinweis zu den Koordinatensystemen.</u> Wenn auf der x-Achse Strecken angezeigt werden, kann man an die Achse entweder „x in m“ schreiben oder x/m. Das kommt daher: Ist $x = 20\,\text{m}$, dann ist $x / \text{m} = 20$.
Und wenn dann an der y-Achse F/N steht, dann heißt dies Kraft in Newton:
Aus $F / \text{N} = 5$ folgt dann F = 5 N.

Viele der gezeigten Aufgaben werden bereits im laufenden Text gelöst, und an Hand der sehr ausführlichen Lösungen wird die Vorgehensweise erklärt.
Einige Aufgaben sind zusätzliches Übungsmaterial, deren Lösungen erst am Textende stehen. Diese Aufgaben sind mit diesem Zeichen gekennzeichnet:

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Hinweise:

Verwandte Texte:

10510	Dreisatz-Rechnungen
10511	Umgekehrter Dreisatz
10512	Proportionalitäten, Tabellen und Schaubilder
10513	Tripel und gekoppelte Dreisätze
10514	Theorie zu Zustandstripeln
10515	Aufgabensammlung zu dem allem.
10516	Linearität

Inhalt und Vorwort

1 Sachzusammenhänge und Tabellen 4

1.1 Erstes Beispiel –viele neue Gedanken 4

1.2 Wichtiges Einführungsbeispiel 5

1.3 Berechnungsmethode für fehlende Werte bei proportionalen Methoden 8

2 Proportionale Größen 9

2.1 Einführung in den Begriff Proportionalität 9
1. Beispiel: Eierpreise 9
2. Beispiel: Badewanne füllen 10
3. Beispiel: Masse eines Holzbalkens 12
4. Beispiel: Aprikosen kaufen 14
5. Beispiel: Ein physikalisches Experiment (Hookesches Gesetz) 16
6. Beispiel: Der Einfluss von Messungenauigkeiten 18

2.2 Zu jeder Proportionalität gehört eine Gleichung, die eine Ursprungsgerade darstellt 19

3 Trainingsaufgaben 27

4 Der Dreisatz – traditionell und modern 37

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1 Sachzusammenhänge und Tabellen

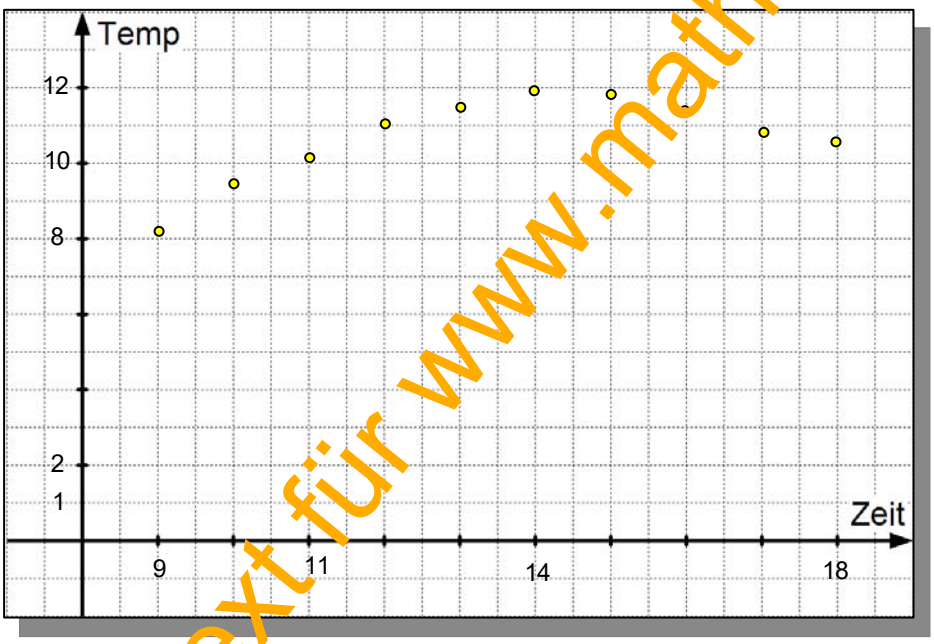
Hier werden quotientengleiche Paare erklärt und gezeigt, wie man mit ihnen Dreisatzaufgaben lösen kann.
Es wird auch gezeigt, wie man Tabellen auswertet und ergänzt.
Die Bedeutung des Proportionalitätsquotienten wird erklärt.

1.1 Erstes Beispiel – Viele neue Gedanken

Klaus misst im Laufe eines Tages die Temperatur vor seinem Haus. Er trägt die Werte zu jeder vollen Stunde in eine Tabelle ein:

Zeit	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
T in ^{O}C	8,2	9,5	10,2	11,0	11,5	11,9	11,8	11,4	10,8	10,7

Diese Daten kann man in ein Koordinatensystem eintragen:



Diesen **Temperaturverlauf** kann man mit so Worten beschreiben: Zuerst steigt die Temperatur an, den höchsten Wert hat sie so zwischen 14 und 15 Uhr, dann nimmt sie wieder ab, aber langsamer als sie morgens zugenommen hat.

Was leider nicht möglich ist, das ist eine Vorhersage auf die Temperaturanzeige um 20 Uhr oder morgens 3 Uhr. Hier kann man nur Tendenzen ansprechen.

Beispiele dieser Art gibt es genügend. Man kann sie mit den Methoden der höheren Mathematik untersuchen (teilweise schon in der Oberstufe), und dann lassen sich mit einiger Unsicherheit behaftet Vorhersagen auf die Werte machen, die man nun nicht direkt gemessen hat.

In unserem weiteren Training wollen wir jedoch Zusammenhänge untersuchen, welche die schöne Eigenschaft haben, dass man Daten, die man nicht kennt, wirklich vorhersagen kann, und zwar weil es einen ganz einfachen mathematischen Zusammenhang gibt, der sich rechnerisch leicht erfassen lässt.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.2 Einführungsbeispiel

Diesen Text unbedingt sorgfältig durcharbeiten!

In den Nachrichten wird regelmäßig der Wechselkurs des US-Dollars bekannt gegeben.
Am 9. Februar 2007 entnahm ich um 11:28 Uhr dem Internet diese Meldung: Der Umrechnungskurs für US-Dollar sei 1,2995 $\frac{\$}{€}$ Zunächst sind diese vier Dezimalstellen verwunderlich, denn man kann ja nur 1,29 $ oder 1,30 $ bezahlen, aber doch nicht 1,2995 $. Die Antwort heißt: Doch, wenn man größere Geldmengen kauft, dann spielen diese Stellen eine wichtige Rolle:

Bei einem Preis von 1,29 $ pro € erhält man für 10.000 € genau 12.900 $.
Bei einem Preis von 1,2995 $ pro € erhält man dafür 12.995 $.

Da wir es uns jetzt bequemer machen wollen rechnen wir mit 1,30 $ pro €.

Sieht man von den Wechselgebühren ab, die eine Bank berechnen muss, dann kann man auf Grund dieser Meldung beliebige Umrechnungen durchführen. Fülle bitte die leeren Felder der Tabelle aus:

x in €	1	2	3	8	10	80			110
y in $	1,30	2,60	3,90	10,40			65,00	0,65	

Diese Tabelle erstellt man nach einem einfachen Prinzip:

Doppelt so viele Dollars kosten doppelt so viel Euro (blaue Pfeile).
Für x = 2 € erhält man dann $y = 1{,}30\ \$ \cdot 2 = 2{,}60\ \$$

Dreimal so viele Dollars kosten dreimal so viel Euro (rote Pfeile) usw.
Für x = 3 € erhält man dann $y = 1{,}30\ \$ \cdot 3 = 3{,}90\ \$$

Allgemein: x-mal so viele Dollars kosten x-mal so viel Euro.

Für x = 10 € erhält man also das 10-fache: $y = 1{,}30\ \$ \cdot 10 = 13\ \$$

Für 28 € erhält man $y_2 = 1{,}30\ \$ \cdot 28 = 36{,}40\ \$$ (blauer Pfeil)

und für 7,50 € bekommt man $y_3 = 1{,}30\ \$ \cdot 7{,}50 = 9{,}75\ \$$ (roter Pfeil)

x in €	1	28	7,50
y in $	1,30	y_2	y_3

Hier die ausgefüllt Tabelle:

x in €	1	2	3	8	10	80	50	0,5	110
y in $	1,30	2,60	3,90	10,40	13,00	104,00	65,00	0,65	143,00

Man kann solche Tabellen auch graphisch darstellen.

usammengehörigen Werte $(1\ € \mid 1{,}30\ \$)$ **bilden ein Wertepaar**.

Die Reihenfolge (zuerst € oder zuerst $) ist zuerst egal, man könnte also auch $(1{,}30\ \$ \mid 1\ €)$ verwenden. Aber wenn man sich für eine Reihenfolge entschieden hat, darf man sie nicht mehr ändern!

Unsere Tabelle enthält 9 Wertepaare. Diese kann man in ein geeignetes Koordinatensystem als Punkte übertragen. Kannst Du das schon, dann versuche es mit den ersten vier Paaren.

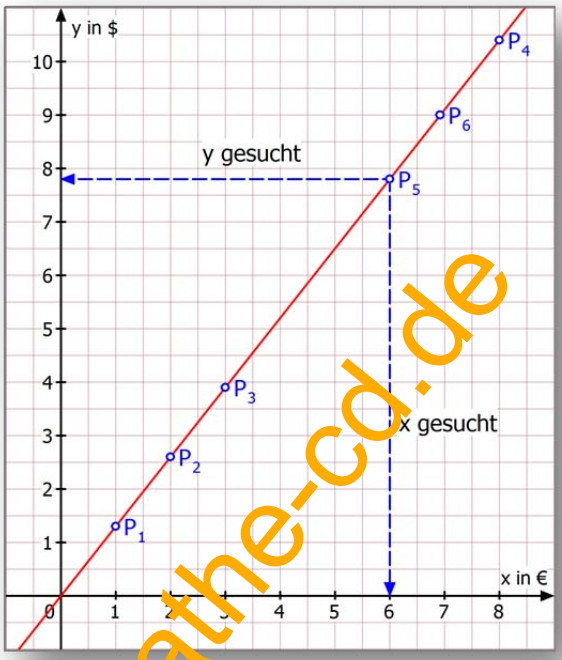
Demo-Text für www.mathe-cd.de

Hier meine Lösung:

Die vier Punkte liegen auf einer Geraden, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht. Es ist eine **Ursprungsgerade**.

Ich schreibe diese vier Punkte in einer Form auf, die man Koordinaten-Schreibweise nennt

$P_1(1\,€ \mid 1{,}30\,\$)$, $P_2(2\,€ \mid 2{,}60\,\$)$,
$P_3(3\,€ \mid 3{,}90\,\$)$, $P_4(8\,€ \mid 10{,}40\,\$)$.



Aufgabe:

Die Abbildung enthält zwei weitere Punkte, P_5 und P_6:

Ermittle nun die Koordinaten (so nennt man die beiden Zahlen (€ und $) für P_5 und P_6.

Ergebnis: Hast du $P_5(6\,€ \mid 7{,}80\,\$)$ gefunden?

Nun, $x_5 = 6$ kann man genau ablesen. Bei $y_5 = 7{,}80$ muss man schon schätzen oder raten.

Man kann diese Zahl aber auch berechnen. Denke an die Pfeile in der ersten Tabelle!

Für 6 € erhält man $y_5 = 1{,}30\,\$ \cdot 6 = 7{,}80\,\$$

Für P_6 lesen wir zuerst die y-Koordinate, also den Eurobetrag 9 $ ab .Dazu wollen wir den Eurowert berechnen. *Doch wie macht man das?*

Die Wertepaare in unserer Tabelle haben eine ganz wichtige Eigenschaft.

Der Mathematiker sagt: Sie bilden quotientengleiche Paare.

Das ist eine ganz einfache Geschichte:

Dividiere ich für das 1. Paar y durch x, dann erhalte ich $\frac{y_1}{x_1} = \frac{1{,}30\,\$}{1\,€} = 1{,}30\,\frac{\$}{€}$

Und das ist der Umrechnungskurs: 1,30 Dollar pro Euro.

Für das zweite Paar ergibt diese Division $\frac{y_2}{x_2} = \frac{2{,}60\,\$}{2\,€} = 1{,}30\,\frac{\$}{€}$.

Aus dem 4. Paar folgt $\frac{y_4}{x_4} = \frac{10{,}40\,\$}{8\,€} = 1{,}30\,\frac{\$}{€}$ usw.

Man kann also aus jedem Paar der Tabelle diesen Umrechnungskurs berechnen.

Mit anderen Worten:

Die Größen x (Eurowert) und y (Dollarwert) bilden quotientengleiche Paare.
Das kürzt man auch so ab: x und y sind proportional.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Nochmals:
In dieser Tabelle bilden alle übereinander stehenden Paare denselben Quotienten:

x in €	1	2	3	8	10	80	50	0,5	110
y in $	1,30	2,60	3,90	10,40	13,00	104,00	65,00	0,65	143,00

Diese 9 Divisionen oder Brüche führen also alle zum gleichen Ergebnis. Darum nennt man die folgenden Brüche **quotientengleich**.

$$\frac{1{,}30\ \$}{1\ €} = \frac{2{,}60\ \$}{2\ €} = \frac{3{,}90\ \$}{3\ €} = \frac{10{,}40\ \$}{8\ €} = \frac{13{,}00\ \$}{10\ €} = \frac{104\ \$}{80\ €} = \frac{65\ \$}{50\ €} = \frac{0{,}65\ \$}{0{,}5\ €} = \frac{143\ \$}{110\ €}$$

Alle diese Brüche haben den gleichen Wert, den man in einfachster Form so schreibt:

$\frac{1{,}30\ \$}{1\ €}$ oder noch besser $1{,}30\frac{\$}{€}$. Man liest das „1,30 Dollar pro EURO“.

Dieser Quotient gibt also an, wie viele Dollars ein Euro wert ist.

Neue Berechnungsmethode mit Verhältnisgleichungen:

Wenn zwei Größen x und y die Eigenschaft haben, dass sie im gleichen Verhältnis zunehmen oder abnehmen (also wenn z. B. zum doppelten x-Wert auch der doppelte y-Wert gehört), dann sind x und y proportional, d.h. sie bilden quotientengleiche Paare.

Kenn man also ein Paar $(1\,€ \mid 1{,}30\ \$)$, dann kann man jedes andere Paar vervollständigen:

Man kann also zu $P_5(6\ € \mid y_5)$ das fehlende y_5, also den Dollarwert so berechnen:

$$\frac{y_5}{6\ €} = \frac{1{,}30\ \$}{1\ €} \quad \Rightarrow \quad y_5 = 1{,}30\frac{\$}{\cancel{€}} \cdot 6\ \cancel{€} = 8{,}70\ \$.$$

Oder zu $P_6(x_6 \mid 6\ \$)$ erhält man den x-Wert:

$$\frac{x_6}{6\ \$} = \frac{1\ €}{1{,}30\ \$} \quad \Rightarrow \quad x_6 = \frac{1\ € \cdot 6\$}{1{,}30\ \$} \approx 4{,}615\ €$$

Rechentipp: **Man kann die Quotienten entweder mit $\frac{y}{x}$ oder mit $\frac{x}{y}$ bilden.**

Das ist egal. Am günstigsten zu rechnen ist es, wenn man den Ansatz so macht, dass man mit der unbekannten Größe im Zähler beginnt.

Diese Methode stelle ich auf der nächsten Seite nochmals an einem anderen Beispiel vor, und dann wird geübt!

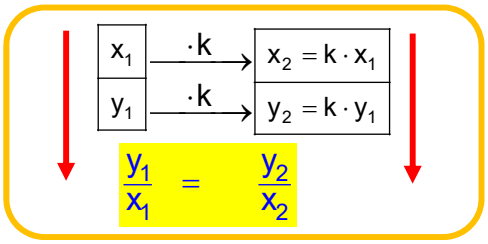
Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.3 Berechnungsmethode für fehlende Werte bei proportionalen Größen:

Dieses Schema sollte alles deutlich machen:

Wenn x und y im gleichen Verhältnis zunehmen,

dann sind sie quotientengleich:



Aufgabe:

Im Jahr 2010 konnte man 250 US-Dollar für 217,39 Euro kaufen. Bankgebühren werden hier ignoriert.

a) Wieviel Euro kosten 400 Dollar?
b) Wieviel Dollar bekommt man für 180 €?

Musterlösung

1. Vorarbeit: Da man für die k-fache Menge Euro auch k-mal so viel Dollar bekommt, sind die Größen x = Eurowert und y = Dollarwert **proportional**.

   Also kann man quotientengleiche Paare bilden und daraus Verhältnisgleichungen bilden.

2. Lösung von a) $P_1(218{,}39\ € \mid 250\ \$)$ und $P_2(x_2 \mid 400\ \$)$ sind quotientengleich.

   Also gilt diese Verhältnisgleichung: (Die Einheiten kann man weglassen:)

$$\frac{x_2}{400} = \frac{218{,}39}{250} \Rightarrow x_2 = \frac{218{,}39 \cdot 400}{250} = 349{,}42\ (€)$$

   Man muss die Einheit € in Klammern setzen, denn links vom Gleichheitszeichen steht ja kein €. Dann darf es auch nicht rechts stehen!!

3. Lösung von b) $P_1(218{,}39\ € \mid 250\ \$)$ und $P_3(180\ € \mid y_3)$ sind quotientengleich

   Also gilt:

$$\frac{y_3}{180} = \frac{250}{218{,}39} \Rightarrow y_3 = \frac{250 \cdot 180}{218{,}39} = 206{,}05\ (\$)$$

Zusatz für Leser, die schon den „normalen“ Dreisatz gelernt haben.

Ich löse a) und b) mit der Dreisatzmethode um zu zeigen, dass die Verhältnisgleichungen (miut nur 1 Zeile) schneller zum Ziel führen. Beide Methoden sind jedoch gleichwertig.

a) 250 $ kosten 218,39 €

1 $ kostet $\frac{218{,}39}{250}$ € ≈ 0,87€

400 $ kosten $\frac{218{,}39 \cdot 400}{250}$ € = 349,32€

b) Für 218,39 € erhält man 250 $

Für 1 € erhält man $\frac{250}{218{,}39}$ $ ≈ 1,15 $

Für 180 € erhält man $\frac{250 \cdot 180}{218{,}39}$ $ = 206,05 $

Rechnet man mit dem gerundeten Wert des 2. Satzes, wird das Ergebnis ungenau:

400 $ kosten 0,87 € · 400 = 348 €

Für 180 € erhält man 1,15 $ · 180 = 207 $

Demo-Text für www.mathe-cd.de